C. Pod

Examen d'analyse 4

Vendredi 10 juin 2016, durée : 2h.

stre 4.

Année universitaire : 2015-2016 .

a tenu compte de la rédaction et la clarté de la feuille.

Exercice 1 : (6points)

Soit la fonction φ définie par :

$$\varphi(x,\theta)=\frac{1}{1-2x\cos\theta+x^2}\quad pour\ (x,\theta)\in]-1,1[\times[0,\pi]$$

1- *Montrer que φ est bien définie sur $D=]-1,1[\times[0,\pi]$.*

2- *Etudier la continuité de φ sur D.* usuelles

3- Soit $I(x)=\int_0^{\pi}\varphi(x,\theta)\,d\theta$.

5 a- *Montrer que I est continue sur $]-1,1[$.*

,5 b- *Soit $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, montrer que : $\cos^2(Arctant)=\frac{1}{1+t^2}$.*

c- *En utilisant un changement de variables, $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$,*

0,5 *montrer que : $I(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-x)^2+(1+x)^2t^2}$*

0,5 d- *En déduire que : $I(x)=\frac{\pi}{1-x^2}$.*

4- *Considérons la fonction : $f(x)=\int_0^{\pi}\frac{2(x-\cos\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2}\,d\theta$.*

a- *Soit $x\neq0$, montrer que :*

0,5 $\forall u\in\mathbb{R}:\ \frac{2(x-u)}{1-2xu+x^2}=\frac{1}{x}+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{1}{1-2xu+x^2}\right)$.

0,5 b- *En déduire que : $\forall x\in]-1,1[:\ f(x)=0$.*

5- *Soit : $F(x)=\int_0^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,d\theta$*

1 a- *Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et calculer F'(x).*

0,5 b- *Montrer que la fonction F est nulle sur $]-1,1[$.*

0,5 c- *Donner la valeur de : $J=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-\cos\theta)\,d\theta$.*

Exercice 2 : (3points)

A) Soit l'ensemble :

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\geq0,(x-1)^2+y^2\leq1\ et\ x^2+(y-1)^2\geq1\}.$$

1 1- *En utilisant les coordonnées polaires, montrer que :*

$$D=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2:\ r\geq0,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\ \ et\ \ 2\sin\theta\leq r\leq2\cos\theta\right\}$$

DMI

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

ENSAH

Examen d'analyse 4

12 juin 2017, durée : 2h.

CP2, Semestre 4. Année universitaire : 2016-2017.

N.B: il sera tenu compte de la rédaction et la clarté de la feuille. Fouzia. MORADI

	Exercice 1. : (7,5 points)
	Soit: $G(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ *pour* $x\in D=]0,1[\cup]1,+\infty[$.
	1- *Montrer que :* $\lim_{x\to 0^+} G(x)=0$.
1pt	2- *Soit* $x>1$, *montrer que :* $G(x)\geq\frac{x^2-x}{\ln(x^2)}$.
1pt	*En déduire :* $\lim_{x\to+\infty} G(x)$.
	3- *Soit* $0<x<1$,
1pt	*a- montrer que :* $\frac{G(x)}{x}\leq\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\,\ln t}\leq\frac{G(x)}{x^2}$.
0,5pt	*b- Calculer* $\int_x^{x^2}\frac{dt}{t.\ln t}$.
0,5pt	*c- En déduire :* $\lim_{x\to 1^-} G(x)$.
0,5pt	4- *Déterminer :* $\lim_{x\to 1^+} G(x)$.
1,5pt	5- *Montrer que G est de classe* C^1 *sur D et calculer* $G'(x)$.
1pt	6- *Dresser le tableau de variations de G.*
0,5pt	7- *En déduire que :* $\exists!\,\alpha>1:\ \int_\alpha^{\alpha^2}\frac{dt}{\ln t}=1$. *(NB : $\ln 2\cong 0{,}69$)*
	Exercice 2 (4 points):
2pt	1) Calculer l'aire du domaine D limité par les paraboles : $y=x^2$ et $y=5-\frac{x^2}{4}$ et $-2\leq x\leq 2$.

Université Mohammed Premier
Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima
Département de Mathématiques et d'Informatique

Examen d'analyse 4

25 juin 2018, durée : 2h.

CP2, Semestre 4. Année universitaire : 2017-2018.

N.B: il sera tenu compte de la rédaction et la clarté des réponses. Fouzia, MORADI

Exercice 1. : (7 points)

Soit la fonction $F :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{(lnt)^2}$$

1pt — 1) *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur* $]1, +\infty[$.

1pt — 2) *Montrer que :*

$$\forall x \epsilon]1, +\infty[: \quad F'(x) = \frac{x-2}{2(lnx)^2}$$

1pt — 3) *Dresser le tableau de variations de* F.

1pt — 4) *Déterminer* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

0,5pt — 5) *a) Montrer que :* $\forall x > 1: \quad 0 < lnx \leq x - 1$

1pt — *b) Montrer que :* $\lim_{x \to 1^+} F(x) = +\infty$.

1pt — 6) *Etablir la relation :*

$$F(x) = \frac{x(2-x)}{2lnx} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{lnt}$$

0,5pt — 7) *En déduire la valeur de :*

$$\int_2^4 \frac{1}{lnt}\left(\frac{1}{lnt} - 1\right) dt$$